

Центр образования школьников «Олимп»
Математический турнир «Осенний марафон – 2006»
Командная олимпиада по математике. 10 класс.

1. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство $\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$.
2. Существует ли такое целое число, которое при асёркивании первой цифры уменьшается в 57 раз.
3. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.
4. Решите в натуральных числах:
 $z^x + 1 = (z + 1)^2$.
5. Окружность, вписанная в треугольник ABC , делит медиану BM на три равные части. Найти отношение $BC : CA : AB$.
6. Три коэффициента a, b, c и два корня x_1, x_2 квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, выписанные в некотором порядке, образуют ряд из 5 последовательных целых чисел. Найдите все такие трёхчлены.
7. Три друга гонят самогон, каждый своим аппаратом. У труса течёт жидкость крепостью a градусов, и стандартная бутылка наполняется за a часов; у Балбеса соответственно b градусов за b часов, у Бывалого - c градусов за c часов. Для ускорения процесса дружба направили все шланги в одну бутылку и наполнили её за сутки. какова крепость смеси?
8. Существуют ли всюду определённые функции $f(x)$ и $g(y)$, для любых x и y : $f(x)g(y) = x + y - 1$.

<http://yarmatschool.narod.ru/>