

**XIII областной турнир математических боев.
Юниорский турнир.**

**1/16 финала. Лицей №86 — Переславль-Залесский.
8 октября 2006 г.**

1. Квадрат целого числа имеет вид ...09 (оканчивается цифрами 0 и 9). Докажите, что третья справа цифра — четная.
2. В треугольнике ABC точки A' , B' , C' лежат внутри сторон BC , CA и AB соответственно. Известно, что $\angle AC'B' = \angle B'A'C$, $\angle CB'A' = \angle A'C'B$, $\angle BA'C' = \angle C'B'A$. Докажите, что точки A' , B' , C' — середины сторон.
3. Отрезок AB пересекает две равные окружности и параллелен их линии центров, причем все точки пересечения прямой AB с окружностями лежат между A и B . Через точку A проводятся касательные к окружности, ближайшей к A , через точку B — касательные к окружности, ближайшей к B . Оказалось, что эти четыре касательные образуют четырехугольник, содержащий внутри себя обе окружности. Докажите, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.
4. На шахматной доске размером 8×8 отметили 17 клеток. Докажите, что из них можно выбрать две так, что коню нужно не менее трех ходов для попадания с одной из них на другую.
5. Рассматриваются такие наборы действительных чисел $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}\}$, заключенных между 0 и 1, что $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20} = (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) \dots (1 - x_{20})$. Найдите среди этих наборов такой набор, для которого значение $x_1 x_2 x_3 \dots x_{20}$ максимально.
6. Может ли $\text{НОК}(a, b) = \text{НОК}(a + c, b + c)$ (a, b, c — натуральные)?
7. Докажите, что если a, b, c — различные целые числа, то значение выражения

$$\frac{a(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} + \frac{b(b+a)(c+b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(c+b)(a+c)}{(b-c)(c-a)}$$

является целым числом.

8. 15 команд играют турнир в один круг. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число матчей.

Бой завершился победой **Лицея №86** со счетом $24-16$.

1/16 финала. Школа №49 — Школа №43. 12 октября 2006 г.

9. На острове живут только лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Встретились три островитянина: Ах, Ох и Ух. Ах сказал: «Мы все — лжецы». Ох ответил: «Ровно один из нас — рыцарь». Ух промолчал. Определите, кто есть кто.
10. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?
11. Как разрезать нарисованную справа таблицу по линиям клеток на пять прямоугольников, чтобы суммы чисел в каждом из них были равны? Укажите все способы и объясните, почему нет других.
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 1 | 1 |
| 4 | 7 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
12. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, не меньшие 3. Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.
13. Подряд записывают натуральные числа, не разделяя их запятыми: 123456789101112131415... Какая цифра стоит на 2006-м месте?
14. Решите числовой ребус: $X : 0 = K, KEЙ$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам — разные цифры).
15. Натуральное число разрешается увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100%, если при этом получится натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя с помощью таких операций получить из числа 1.
16. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 лежат внутри сторон BC, CA и AB соответственно. Известно, что $\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$, $\angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B$, $\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A$. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон треугольника ABC .

Бой завершился победой **Школы №49** со счетом $41-25$.

1/16 финала. Гимназия №2 — Школа №90. 28 октября 2006 г.

17. Найдите все пары целых чисел (m, n) , удовлетворяющие соотношению: $m^2 + 2006 = n^2$.

18. Может ли конь пройти с поля $a1$ на поле $h8$, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?
19. Как разрезать нарисованную справа таблицу по линиям клеток на пять прямоугольников, чтобы суммы чисел в каждом из них были равны? Укажите все способы и объясните, почему нет других.
- | | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 1 | 1 |
| 4 | 7 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
20. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, не меньшие 3. Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.
21. Вася и Коля задумали по двузначному числу. Учитель предложил каждому из них прибавить к своему числу сумму его цифр и записать результат на доске. Оказалось, что на доске записаны два одинаковых числа. Докажите, что Вася и Коля задумали одинаковые числа.
22. Тридцатое царство состоит из 4 городов, расположенных в вершинах квадрата со стороной 100 вёрст. В царской казне есть средства для прокладки 280 вёрст дорог. Можно ли построить такую сеть дорог, чтобы из любого города можно было по дорогам попасть в любой другой?
23. Докажите что значение выражения

$$\frac{a(c+a)(a+b)}{(c-a)(a-b)} + \frac{b(b+a)(c+b)}{(a-b)(b-c)} + \frac{c(c+b)(a+c)}{(b-c)(c-a)}$$

является целым числом, если a, b, c — различные целые числа.

24. 15 команд играют турнир в один круг. Докажите, что в некотором матче встретятся команды, сыгравшие перед этим в сумме нечётное число матчей.

Бой завершился победой **Гимназии №2** со счетом $45-10$.

**1/16 финала. Гимназия №3 — Гимназия №1 г. Ростова.
18 декабря 2006 г.**

25. Всякий ли прямоугольник можно разрезать на 2006 частей, из которых можно сложить квадрат?
26. Найдите все трёхзначные числа A , обладающие следующим свойством: среднее арифметическое всех чисел, получающихся из числа A различными перестановками его цифр, равно A .

27. У треугольников ABC и CDE известны углы $\angle BAC = \angle CED = 90^\circ$ и $\angle ABC = \angle CDE = \alpha$. Вершины этих треугольников идут по часовой стрелке. Пусть F — середина BD . Найдите угол AFE (точки A и E отличны от F).
28. У Игоря и Вали есть по белому квадрату 8×8 , разбитому на клетки 1×1 . Они закрасили по одинаковому числу клеток на своих квадратах в синий цвет. Докажите, что удастся так разрезать эти квадраты на доминошки 2×1 , что и из доминошек Игоря и из доминошек Вали можно будет сложить по квадрату 8×8 с одной и той же синей картинкой.
29. Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.
30. В треугольнике ABC биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к стороне AB и высота, опущенная из вершины B , пересекаются в одной точке. Докажите, что биссектриса угла A , серединный перпендикуляр к AC и высота, опущенная из C , также пересекаются в одной точке.
31. В парламенте у каждого её члена не более трёх врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается что если B — враг A , то и A — враг B)
32. Вдоль железной дороги стоят километровые столбы на расстоянии 1 км друг от друга. Один из них покрасили в желтый цвет и шесть — в красный. сумма расстояний от желтого столба до всех красных равна 14 км. Чему может быть равно максимальное расстояние между красными столбами?

Бой завершился победой **Гимназии №3** со счетом 36–5.

1/8 финала. Гимназия №3 — Гимназия №2. 14 декабря 2006 г.

33. В начале игры на доске написано число 1000. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно вычесть из написанного числа любой его натуральный делитель и результат написать на доску вместо исходного числа. Тот, кто напишет ноль, проигрывает. Кто из игроков может обеспечить себе победу: начинающий или его противник?
34. 8 теннисистов провели круговой турнир. Докажите, что найдутся 4 теннисиста A, B, C, D , такие, что A выиграл у B, C, D , B выиграл у C и D , C выиграл у D .

35. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = 2BF$. Точка G симметрична точке E относительно точки F . Докажите, что угол ACG прямой.
36. За круглым столом сидят 25 человек. Им роздано по две карточки. На каждой карточке написано одно из чисел от 1 до 25 (каждое число написано ровно на двух карточках). Раз в минуту (одновременно) каждый передает соседу слева карточку, на которой написано меньшее число. Докажите, что через некоторое время у кого-то на руках будут две карточки с равными числами.
37. P и Q — простые числа, $Q^3 - 1$ делится на P , $P - 1$ делится на Q . Докажите, что $P = 1 + Q + Q^2$.
38. На стороне AB правильного треугольника ABC построили как на диаметре полуокружность во внешнюю сторону. Точки X и Y делят эту полуокружность на три равные части. Докажите, что отрезки CX и CY делят сторону AB на три равные части.
39. Можно ли раскрасить в два цвета клетки квадрата 7×7 так, чтобы каждая граничила ровно с двумя клетками другого цвета?
40. Про квадратный трехчлен $x^2 + px + q$, где p и q — целые числа, известно, что он принимает положительные значения при всех целых значениях x . Докажите, что он также принимает положительные значения и при нецелых x .

Бой завершился победой **Гимназии №3** со счетом *51–26*.

1/16 финала. Школа №36 — Школа №52. 23 декабря 2006 г.

41. Учительница назвала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трёх из четырёх названных чисел. Докажите, что Катя ошибалась.
42. В остроугольном треугольнике ABC проведены медиана AM и высота BH . Известно, что $\angle MCA = 2\angle MAC$, $AH = 1$. Найдите длину стороны BC .
43. Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, требующихся для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана эта задача?

44. Можно ли раскрасить в два цвета клетки квадрата 7×7 так, чтобы каждая граничила ровно с двумя клетками другого цвета?
45. На острове живут только лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Встретились три островитянина: Ах, Ох и Ух. Ах сказал: «Мы все — лжецы». Ох ответил: «Ровно один из нас — рыцарь». Ух промолчал. Определите, кто есть кто.
46. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE = 2BF$. Точка G симметрична точке E относительно точки F . Докажите, что угол ACG прямой.
47. Подряд записывают натуральные числа, не разделяя их запятыми: 123456789101112131415... Какая цифра стоит на 2006-м месте?
48. 8 теннисистов провели круговой турнир. Докажите, что найдутся 4 теннисиста A, B, C, D , такие, что A выиграл у B, C и D , B выиграл у C и D , C выиграл у D .

Бой завершился победой **Школы №52** со счетом $24-38$.

1/8 финала. Лицей №86 — Школа №18. 19 декабря 2006 г.

49. Саша выписал первый миллион натуральных чисел, не делящихся на 4. Рома подсчитал сумму 1000 подряд идущих чисел в Сашиной записи. Могло ли у него получиться в результате 20012002?
50. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом B провели медиану BM . K и L — точки касания вписанной окружности треугольника ABM со сторонами AB и AM . Известно, что прямые KL и BM параллельны. Найдите угол ACB .
51. Учительница назвала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трёх из четырёх названных чисел. Докажите, что Катя ошибалась.
52. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2} - 1}{b} + \frac{\sqrt{b^2 + 2} - 1}{a} \geq \sqrt{2}.$$

53. У царя Гвидона было 5 детей. Из всех его потомков (детей, внуков, правнуков и т. д.) 57 имели ровно трёх сыновей, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков было у царя Гвидона?

54. Точка D — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC . Точка E — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на сторону BC . Отрезки AE и BD пересекаются в точке F . Установите какой из отрезков BF и BE длиннее.
55. Дан трёхчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Вместо $p(x)$ записывают трёхчлен $\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2}$, а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.
56. Можно ли раскрасить в два цвета клетки квадрата 7×7 так, чтобы каждая граничила ровно с двумя клетками другого цвета?

Бой завершился победой **Лицея №86** со счетом $49-6$.

1/4 финала. Лицей №86 — Школа №58. 22 марта 2007 г.

57. Решите в вещественных числах систему уравнений

$$\begin{cases} 8a^2 + 7c^2 = 16ab, \\ 9b^2 + 4d^2 = 8cd \end{cases}$$

58. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.
59. Точки E и F лежат соответственно на сторонах AB и BC ромба $ABCD$, причём $AE = 5BE$, $BF = 5CF$. Известно, что треугольник DEF равносторонний. Найдите величину угла BAC .
60. Последовательность строится по следующему закону: на первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на 1. Какое число стоит на 2007 месте?
61. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D такая, что $DC = 2AD$. O — центр вписанной окружности треугольника DBC , E — точка касания этой окружности с прямой BD . Оказалось, что $BD = BC$. Докажите, что прямая AE параллельна прямой DO .
62. Квадратная клетчатая таблица 3×3 заполнена числами так, что суммы чисел во всех квадратах 2×2 равны между собой. Докажите, что равны и суммы чисел на диагоналях.

63. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого больше 1500.
64. Имеется две кучки камней: в первой – 7 камней, во второй – 5. За ход разрешается брать любое количество камней из одной кучки или поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Бой завершился победой **Школы №58** со счетом $35-37$ (пенальти: $1-2$).

**1/8 финала. Школа №52 — Лицей №2 г. Рыбинска.
2 марта 2007 г.**

65. Продолжение медианы треугольника ABC , проведенной из A , пересекает описанную около него окружность в точке D . Известно, что $AC = DC = 1$. Найдите длину BC .
66. Сколькими способами 2^n можно разложить в сумму четырех квадратов натуральных чисел?
67. На кошачей выставке в ряд сидят 10 котов и 19 кошек, причём рядом с любой кошкой сидит более толстый кот. Докажите, что рядом с любым котом сидит кошка, которая тоньше его.
68. По кругу расставлено 14 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых четырёх чисел, стоящих подряд равна 30. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 15.
69. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота CH . Оказалось, что $AH = BC$. Докажите, что биссектриса угла B , высота опущенная из вершины A , и прямая, проходящая через точку H и параллельная стороне BC , пересекаются в одной точке.
70. В турнире по игре в «крестики-нолики», проведённом по системе «проиграл — выбыл», участвовали 18 школьников. Каждый день играли одну партию, участники которой выбирались жребием из ещё не выбывших школьников. Шестеро школьников утверждают, что участвовали в четырех партиях каждый. Правы ли они?
71. Учительница написала на доске 4 различных натуральных числа и попросила детей перемножить первые два и последние два. Но девочка Маша всё перепутала и сложила первые два, а так же последние два. При этом у неё получились такие же ответы как и у отличницы Кати. Какие числа написала на доске учительница?

72. В гостинной барона Мюнхаузена пол вымощен одинаковыми квадратными каменными плитами. Барон утверждает, что его новый ковёр (сделанный из одного куска коврового материала) закрывает ровно 24 плиты и при этом каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд плит в гостинной содержит ровно 4 плиты покрытых ковром. Не обманывает ли барон?

Бой завершился победой **Школы №52** со счетом *39–36* (пенальти: *2–1*).

1/4 финала. Гимназия №3 — Школа №52. 12 марта 2007 г.

73. Даны три целых числа M , N и K , причем K и M взаимно просты. Обязательно ли найдется такое целое x , что $Mx + N$ делится на K .
74. Решите уравнение: $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) = 1$.
75. Дан правильный треугольник ABC и точка O внутри него; M , P и Q — проекции этой точки на медианы AD , BE и CF соответственно. Докажите, что величина $AM + BP + CQ$ не зависит от выбора точки O .
76. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить биссектрису угла, вершина которого не доступна?
77. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?
78. На столе лежат монеты без наложений. Докажите, что одну из них можно выдвинуть, не задевая остальных.
79. На доске 6×6 расположен корабль. Какое наименьшее число выстрелов требуется, чтобы наверняка его ранить, если корабль имеет вид уголка 1×3 ?
80. Для натуральных m и n докажите неравенство $2^{m+n-2} \geq mn$.

Бой завершился победой **Гимназии №3** со счетом *42–24*.

Полуфинал. Школа №58 — Школа №33. 6 апреля 2007 г.

81. Докажите, что натуральное число n является составным тогда и только тогда, когда существуют такие натуральные числа a , b , x и y , что $a + b = n$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

82. Игроки по очереди ставят королей на шахматную доску: первый игрок — белых королей, второй — чёрных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?
83. В стране есть несколько городов и несколько дорог с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через остальные. При этом, какие бы два города ни взять, хотя бы из одного из них можно проехать в другой, не нарушая правил движения. Докажите, что найдется город, из которого можно проехать в любой другой, не нарушая правил движения.
84. Решите в целых числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$$

85. $f(x)$ и $g(x)$ — квадратные трёхчлены, старшие коэффициенты которых равны 1. Известно, что трёхчлен $f(x) + g(x)$ имеет два различных корня и каждый из этих корней является также корнем уравнения $f(x) - g(x)^3 = 0$. Докажите, что трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.
86. Из концов диаметра AB проведены хорды AC и BD , которые пересекаются в точке M . Докажите, что величина выражения $AC \cdot AM + BD \cdot BM$ постоянна для данной окружности.
87. В четырёхугольнике $ABCD$ E — середина AB , F — середина CD . Докажите, что середины AF , BF , CE и DE являются вершинами параллелограмма.
88. Вася написал число, увидел, что оно делится на свою последнюю цифру, и поделил на неё. Оказалось, что полученное число тоже делится на свою последнюю цифру, и Вася опять на неё поделил и т.д. После 100 делений Вася получил 1. Какое число у него могло быть в начале?

Бой завершился победой **Школы №33** со счетом 25–46.

Полуфинал. Гимназия №3 — Костромская область. 15 мая 2007г.

89. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD . Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник BCD , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите углы треугольника ABC .

90. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство:
- $$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \frac{1}{\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+d}}.$$
91. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка K таким образом, что середина отрезка AD равноудалена от точек K и C , а середина отрезка CD равноудалена от точек K и A . Точка N — середина отрезка BK . Докажите, что углы NAK и NSK равны.
92. Числа от 1 до 999999 разбиты на две группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую — числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?
93. В компании из $2n + 1$ человек для любых n человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
94. Ненулевые числа a, b и c удовлетворяют равенствам $a^2 - b^2 = bc$ и $b^2 - c^2 = ca$. Докажите, что $a^2 - c^2 = ab$.
95. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится всего 30 л кислоты. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд. Затем из второго сосуда отливают в первый 12 л смеси. Сколько кислоты было первоначально в первом сосуде, если во втором сосуде после переливания оказалось кислоты на 2 л меньше, чем в первом?
96. Прямоугольная таблица из натуральных чисел имеет размеры $m \times n$, где $m > n > 2$. Среди четырех чисел стоящих на пересечении любых двух строк и двух столбцов найдутся числа противоположной четности. Определите наибольшее возможное значение выражения $m + n$.

Бой завершился победой **Костромской области** со счетом 2–78.

Финал. Школа №33 — Костромская область. 29 мая 2007 г.

97. Найдите все тройки p, q, r , что уравнения $x^2 + px + q = 0$ (1); $x^2 + qx + r = 0$ (2); $x^2 + rx + p = 0$ (3) имеют корни, причем корнями первого являются числа q и r (и только они), второго — p и r , а третьего — q и p (и только они).

98. Найдите все натуральные числа, которые равны квадрату количества своих натуральных делителей.
99. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . E и F — основания перпендикуляров, опущенных из A и C соответственно на прямую BD . M — основание перпендикуляра, опущенного из D на прямую BC . Докажите, что $\angle DME = \angle DMF$.
100. Определите, какое число больше: $||\sqrt[3]{5} - \sqrt{3}| - \sqrt{3}| - \sqrt[3]{5}$ или 0,01?
101. В невозрастающей последовательности из 100 положительных действительных чисел сумма первых двух чисел не более 100, сумма оставшихся чисел также не более 100. Какое наибольшее значение может принимать сумма квадратов чисел в данной последовательности?
102. В треугольнике ABC точка O — центр вписанной окружности, касающейся сторон BC , CA , AB в точках D , E , F соответственно. Лучи BO и CO пересекают прямую EF в точках P и Q соответственно. Известно, что треугольник DPQ — равнобедренный. Докажите, что треугольник ABC также равнобедренный.
103. Сумма неотрицательных чисел x , y и z равна 1. Докажите, что $x^2y + y^2z + z^2x \leq \frac{4}{27}$.
104. За круглым столом сидят 25 депутатов. Каждый час на голосование выносится предложение и каждый из депутатов выносит свое решение — «за» или «против». При этом каждый депутат меняет свое решение в том и только том случае, если при предыдущем голосовании (час назад) его решение отличалось от решения обоих соседей. Докажите, что с какого-то момента каждый депутат перестанет менять свое решение.

Бой завершился победой **Школы №33** со счетом 33-28.