

**XIII областной турнир математических боев.  
Основной турнир.**

**1/32 финала. Школа №18 — Лицей №86. 11 октября 2006 г.**

1. Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ , где  $a, b, c$  — стороны некоторого треугольника.
  2. Дан квадрат  $ABCD$ ,  $M$  — середина  $CD$ . На отрезке  $AC$  взята точка  $P$  так, что  $\angle ABP = \angle CMP = \alpha$ . Найдите величину  $\alpha$  и отношение, в котором  $P$  делит  $AC$ .
  3. Как разрезать нарисованную справа таблицу по линиям клеток на пять прямоугольников, чтобы суммы чисел в каждом из них были равны? Укажите все способы и объясните, почему нет других.
- |   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 3 | 5 | 1 | 1 |
| 4 | 7 | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 1 | 2 |
4. С помощью циркуля и линейки разделите данный угол  $19^\circ$  на 19 равных частей.
  5. На острове живут только лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Встретились три островитянина: Ах, Ох и Ух. Ах сказал: «Мы все — лжецы». Ох ответил: «Ровно один из нас — рыцарь». Ух промолчал. Определите, кто есть кто.
  6. Вася задумал двузначное число и написал его три раза подряд. Полученное шестизначное число он последовательно разделил нацело на 17, 22 и 27, каждый раз отбрасывая остаток. Докажите, что в результате он получил исходное число.
  7. Сколько существует таких пар положительных чисел  $x, y$ , что  $x + y = 1/x + 1/y$ , причем  $x$  — натуральное число, не превосходящее 2006?
  8. Может ли конь пройти с поля  $a1$  на поле  $h8$ , побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно один раз?

Бой завершился победой **Лицея №86** со счетом  $12-61$ .

**1/32 финала. ФМЛ г. Углича — Гимназия №3. 26 октября 2006 г.**

1. Найдите все пары целых чисел  $(m, n)$ , удовлетворяющие соотношению:  $m^2 + 2006 = n^2$ .

2. На основании  $AD$  трапеции  $ABCD$  нашлась такая точка  $E$ , что периметры треугольников  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $ECD$  равны. Докажите, что  $BC = AD/2$ .
3. Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  таков, что уравнение  $f(x) = x$  не имеет вещественных корней. Докажите, что уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет вещественных корней.
4. Решите уравнение:  $x^3 + [x] = 3$ . ( $[x]$  — целая часть  $x$ , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .)
5. Пусть  $x$ ,  $y$  — положительные числа,  $s$  — наименьшее из чисел  $x$ ,  $y + 1/x$ ,  $1/y$ . Найдите наибольшее возможное значение  $s$ . При каких  $x$ ,  $y$  оно достигается?
6. Длины сторон треугольника — последовательные целые числа, не меньшие 3. Докажите, что высота, опущенная на среднюю по величине сторону, делит ее на отрезки, разность которых равна 4.
7. Натуральное число разрешается увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100%, если при этом получаем натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя с помощью таких операций получить из числа 1.
8. В некотором государстве каждые два города соединены ровно одной дорогой: это либо шоссе, либо железная дорога. Докажите, что можно выбрать один вид транспорта — автомобиль или поезд — так, чтобы из любого города в любой другой можно было проехать, заезжая по дороге не более чем в два других города и используя только этот вид транспорта.

Бой завершился победой Гимназии №3 со счетом 24–23 (пенальти: 0–2).

**1/32 финала. Гимназия №1 г. Ростова — Гимназия №2.**

**2 ноября 2006 г.**

1. Многочлен  $P(x)$  четвертой степени с целыми коэффициентами при всех целых  $x$  делится на 7. Докажите, что все его коэффициенты делятся на 7.
2. Известно, что  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $xy \geq 1$ . Докажите, что  $x^3 + y^3 + 4xy \geq x^2 + y^2 + x + y + 2$ .
3. Шесть команд в однокруговом хоккейном турнире набрали разное количество очков. Только одна встреча окончилась вничью. Также

оказалось, что каждая команда, кроме занявшей первое место, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу. (Примечание: за победу команда получает 2 очка, за поражение — 0 очков, за ничью — 1 очко.)

4. Окружность, проходящая через вершины  $A$  и  $B$  единичного квадрата  $ABCD$ , пересекает прямые  $AD$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $M$  (отличных от  $A$ ). Из точки  $K$  на прямую  $AC$  опущен перпендикуляр  $KH$ . Найдите длину отрезка  $MH$ .
5. При каких значениях  $n$  в клетках квадратной таблицы  $n \times n$  можно расставить числа 0, 1 и 2 таким образом, что суммы чисел по строкам и по столбцам принимали бы все различные значения от 1 до  $2n$ ?
6. В сети метро из любой станции можно проехать в любую. Докажите, что можно закрыть одну из них с сохранением данного свойства.
7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — центр описанной окружности, точка  $H$  — точка пересечения высот. Прямые  $BH$  и  $CH$  пересекают отрезки  $CO$  и  $BO$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Докажите, что если треугольники  $ODH$  и  $OEH$  равнобедренные, то треугольник  $ABC$  тоже равнобедренный.
8. Решите в целых числах уравнение  $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6 = 6abcdef + 1$ .

Бой завершился победой Гимназии №2 со счетом 22–54.

**1/32 финала. Школа №76 — Ярославский район.**

**15 ноября 2006 г.**

1. С записанным на доске числом разрешено производить два следующих действия: 1) приписывать справа любую цифру; 2) делить на два, если число чётное. Какие числа можно получить из единицы, действуя так нужное число раз?
2. Шесть команд в однокруговом хоккейном турнире набрали разное количество очков. Только одна встреча окончилась вничью. Также оказалось, что каждая команда, кроме занявшей первое место, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу. (Примечание: за победу команда получает 2 очка, за поражение — 0 очков, за ничью — 1 очко.)
3. Многочлен  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  с целыми коэффициентами при любом целом значении  $x$  делится на 7. Докажите, что все его коэффициенты делятся на 7.

4. Тридцатое царство состоит из 4 городов, расположенных в вершинах квадрата со стороной 100 вёрст. В царской казне есть средства для прокладки 280 вёрст дорог. Можно ли построить сеть дорог, чтобы из любого города можно было по дорогам попасть в любой другой?
5. Подряд записывают натуральные числа, не разделяя их запятыми: 123456789101112131415... Какая цифра стоит на 2006-м месте?
6. В треугольнике  $ABC$ , площадь которого равна 76, проведены медианы  $AE$  и  $BK$ , пересекающиеся в точке  $O$ . Найдите площадь четырёхугольника  $CKOE$ .
7. Известно, что  $0 < a, b \leq \frac{1}{2}$ . Докажите неравенство:

$$\frac{1-a}{1-b} + \frac{1-b}{1-a} \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}.$$

8. Решите в целых числах уравнение:  $m^2 + 2006 = n^{76}$ .

Бой завершился победой **Ярославского района** со счетом 3–42.

**1/16 финала. Школа №36 — Переславль-Залесский.**

**14 декабря 2006 г.**

1. Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной (первоначально пустой) клетчатой доске. Ходят игроки по очереди; первый каждым своим ходом ставит один крестик в произвольную пустую клетку, а второй — два нолика в произвольные различные пустые клетки. Сможет ли второй при произвольной игре первого добиться того, чтобы ни в одном квадратике  $2 \times 2$  никогда не оказалось трех одинаковых значков — крестиков или ноликов?
2. О функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  известно, что множество значений суммы  $f(x) + f(2x)$  конечно. Обязательно ли множество значений  $f(x)$  конечно?
3. Найдите все простые  $p$  и  $q$  такие, что  $p^q - pq$  тоже простое.
4. Внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$  такая, что  $\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{3}(\angle A + \angle C)$ . Докажите, что выполняется равенство:  $BC(PA + BC) = AB(PC + AB)$ .
5. Известно, что действительные числа  $a$  и  $b$  положительны, а сумма минимального значения квадратного трёхчлена  $f(x) = ax^2 + 8x + b$  и минимального значения трёхчлена  $g(x) = bx^2 + 8x + a$  равна нулю. Докажите, что эти минимальные значения оба равны нулю.

6. На гипотенузе  $AC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбрана такая точка  $D$ , что  $BC = CD$ . На катете  $BC$  выбрана такая точка  $E$ , что  $DE = CE$ . Докажите, что  $AD + BE = DE$ .
7. Числа  $a, b, c, d$  лежат в отрезке  $[2, 4]$ . Докажите неравенство  $25(ab + cd)^2 \geq 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$ .
8. В правильном  $n$ -угольнике провели все диагонали. Стороны и диагонали покрасили в несколько цветов, причем цветов не менее, чем  $n$ . Докажите, что в многоугольнике есть три вершины, соединенные отрезками попарно различных цветов.

Бой завершился победой **Переславля-Залесского** со счетом 15–58.

**1/16 финала. Школа №49 — Ярославский район.  
20 декабря 2006 г.**

1. Учительница назвала отличнице Кате четыре положительных числа. Катя написала на доске числа 3, 4 и 7 и сказала, что каждое из них является суммой каких-то трёх из четырёх названных чисел. Докажите, что Катя ошибалась.
2. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  с прямым углом  $B$  провели медиану  $BM$ .  $K$  и  $L$  — точки касания вписанной окружности треугольника  $ABM$  со сторонами  $AB$  и  $AM$ . Известно, что прямые  $KL$  и  $BM$  параллельны. Найдите угол  $ACB$ .
3. Можно ли раскрасить в два цвета клетки квадрата  $7 \times 7$  так, чтобы каждая граничила ровно с двумя клетками другого цвета?
4. Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, требующихся для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана эта задача?
5. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$  и высота  $BH$ . Известно, что  $\angle MCA = 2\angle MAC$ ,  $AH = 1$ . Найдите длину стороны  $BC$ .
6. Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной (первоначально пустой) клетчатой доске. Ходят игроки по очереди; первый каждым своим ходом ставит один крестик в произвольную пустую клетку, а второй — два нолика в произвольные различные пустые клетки. Сможет ли второй при произвольной игре первого добиться того, чтобы ни в одном квадратике  $2 \times 2$  никогда не оказалось трех одинаковых значков — крестиков или ноликов?

7. Дан трёхчлен  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Вместо  $p(x)$  записывают трёхчлен  $\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2}$ , а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.
8. Решите уравнение:  $\left[ \frac{2x+3}{4} \right] = \frac{6x-1}{3}$ .

Бой завершился технической победой **Ярославского района**.

**1/16 финала. Школа №58(1) — Провинциальный колледж.  
21 декабря 2006 г.**

- Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  лежат в отрезке  $[2, 4]$ . Докажите неравенство  $25(ab + cd)^2 \geq 16(a^2 + d^2)(b^2 + c^2)$ .
- Внутри треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$  такая, что  $\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{3}(\angle A + \angle C)$ . Докажите, что выполняется равенство:  $BC(PA + BC) = AB(PC + AB)$ .
- Можно ли раскрасить в два цвета клетки квадрата  $7 \times 7$  так, чтобы каждая граничила ровно с двумя клетками другого цвета?
- Если к году, в котором была придумана эта задача, прибавить сумму цифр, требующихся для записи этого года, получится 2010. В каком году была придумана эта задача?
- В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведены медиана  $AM$  и высота  $BH$ . Известно, что  $\angle MCA = 2\angle MAC$ ,  $AH = 1$ . Найдите  $BC$ .
- Два игрока играют в крестики-нолики на бесконечной (первоначально пустой) клетчатой доске. Ходят игроки по очереди; первый каждым своим ходом ставит один крестик в произвольную пустую клетку, а второй — два нолика в произвольные различные пустые клетки. Сможет ли второй при произвольной игре первого добиться того, чтобы ни в одном квадратике  $2 \times 2$  никогда не оказалось трех одинаковых значков — крестиков или ноликов?
- Дан трёхчлен  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Вместо  $p(x)$  записывают трёхчлен  $\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2}$ , а исходный трёхчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трёхчлен, не имеющий корней.

8. Решите уравнение:  $\left[ \frac{2x + 3}{4} \right] = \frac{6x - 1}{3}.$

Бой завершился победой **Школы №58(1)** со счетом 56–23.

**1/16 финала. Школа №58(2) — Гимназия №2. 1 февраля 2007 г.**

1. Каждый из 11 сидящих за круглым столом сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Сколько рыцарей могло сидеть за столом?
2. На стороне  $AB$  остроугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность.  $M_1$  и  $M_2$  — точки пересечения окружности со сторонами  $AC$  и  $BC$ . Через точки  $M_1$  и  $M_2$  проведены касательные к окружности. Докажите, что точка пересечения этих касательных лежит на высоте  $CD$  треугольника  $ABC$ .
3. Остап Бендер организовал в городе Фуксе раздачу слонов населению. На раздачу явились 28 членов профсоюза и 37 не членов, причём Остап раздавал слонов поровну всем членам профсоюза и поровну — не членам. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи (так, чтобы раздать всех слонов). Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?
4. Докажите, что уравнение  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ , где  $|a_k| \leq 1$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ) не имеет корней, модуль которых превышает 2.
5. В треугольнике  $ABC$  медианы  $AK$  и  $BL$  взаимно перпендикулярны,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ . Найдите его площадь.
6. Сумма трех действительных чисел равна 3, а сумма их кубов равна сумме их четвертых степеней. Чему могут быть равны эти числа?
7. Для любых положительных чисел  $x$  и  $y$ , меньших единицы, докажите неравенство  $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}.$
8. 9 киборгов заполняют планету. Каждый день в борьбе за сферы влияния какие-то два киборга сталкиваются друг с другом. Через какое-то время оказалось, что каких бы четырех киборгов мы не взяли, найдутся двое, не сталкивавшиеся пока между собой. Докажите, что можно выбрать тройку киборгов, между которыми пока не было столкновений.

Бой завершился победой **Гимназии №2** со счетом 52–27.

**1/16 финала. Школа №1 — Гимназия №3. 26 февраля 2007 г.**

1. Продолжение медианы треугольника  $ABC$ , проведенной из  $A$ , пересекает описанную около него окружность в точке  $D$ . Известно, что  $AC = DC = 1$ . Найдите длину  $BC$ .
2. Вокруг равностороннего треугольника  $ABC$  описана окружность и на дуге  $BC$  взята произвольная точка  $M$ . Докажите, что  $AM = BM + CM$ .
3.  $p_0$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ . Докажите, что уравнение  $p_0 + p_1x + p_2x^2 = x$  имеет корень  $x_0$ , удовлетворяющий  $0 < x_0 < 1$  тогда, и только тогда, когда выполняется неравенство  $p_1 + 2p_2 > 1$ .
4. Сколькими способами  $2^n$  можно разложить в сумму четырех квадратов натуральных чисел?
5. В арифметической прогрессии сумма  $m$  ее первых членов оказалась равна сумме  $n$  ее первых членов ( $m \neq n$ ). Докажите, что сумма  $m + n$  ее первых членов равна нулю.
6. Какое наибольшее число групп по 3 натуральных числа можно выбрать так, чтобы все числа в группах были различными, а сумма чисел в каждой группе была равна 2007?
7. Докажите тождество:  $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1$
8. Среди 13 последовательных натуральных чисел 7 четных и 5 кратных трем. Сколько среди них чисел, кратных 6?

Бой завершился победой **Гимназии №3** со счетом 0–78.

**1/16 финала. Школа №43 — Лицей №1 г. Тутаева.  
28 февраля 2007 г.**

1. Среди 13 последовательных натуральных чисел 7 четных и 5 кратных трем. Сколько среди них может быть чисел, кратных 6?
2. Вокруг равностороннего треугольника  $ABC$  описана окружность и на дуге  $BC$  взята произвольная точка  $M$ . Докажите, что  $AM = BM + CM$ .
3.  $p_0$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $p_0 + p_1 + p_2 = 1$ . Докажите, что уравнение  $p_0 + p_1x + p_2x^2 = x$  имеет корень  $x_0$ , удовлетворяющий  $0 < x_0 < 1$ , тогда и только тогда, когда выполняется неравенство  $p_1 + 2p_2 > 1$ .



4. В треугольнике  $ABC$  медианы  $AK$  и  $BL$  взаимно перпендикулярны,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ . Найдите его площадь.
5. В арифметической прогрессии сумма  $m$  ее первых членов оказалась равна сумме  $n$  ее первых членов ( $m \neq n$ ). Докажите, что сумма  $m + n$  ее первых членов равна нулю
6. Для любых положительных чисел  $x$  и  $y$ , меньших единицы, докажите неравенство  $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \leq \frac{2}{1+xy}$ .
7. Докажите тождество:  $\frac{1}{2 \sin 10^\circ} - 2 \sin 70^\circ = 1$
8. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, можно будет добраться из любого города в любой другой (возможно, с пересадками), пользуясь рейсами оставшихся двух авиакомпаний. Какое наименьшее количество авиалиний может быть в стране?

Бой завершился победой **Лицея №1 г. Тутаева** со счетом  $36-42$ .

**1/4 финала. Лицей №2 г. Рыбинска — Переславль-Залесский.  
15 марта 2007 г.**

1.  $T$  — множество всех делителей числа  $2828^{100}$ . Какое наибольшее число элементов может содержать подмножество  $S$  множества  $T$ , в котором любой элемент не делит любой другой элемент множества  $S$ ?
2. Докажите, что если три различных окружности имеют общую хорду  $AB$ , то любая прямая, проходящая через  $A$  и отличная от  $AB$ , определяет постоянное отношение  $XU : UZ$ , где  $X, U, Z$  — это точки пересечения прямой с каждой из трёх окружностей, причём точка  $U$  лежит между точками  $X$  и  $Z$ .
3. Найдите все натуральные  $n$ , при которых уравнение  $x^n + (2+x)^n + (2-x)^n = 0$  имеет целое решение.
4. Точка  $O$  лежит внутри тетраэдра и равноудалена от плоскостей его граней. Верно ли, что проекция точки  $O$  на плоскость каждой грани есть внутренняя точка этой грани?
5. Сколько существует способов расставить на шахматной доске  $9 \times 9$  восемь ладей, так что бы они не били друг друга и располагались все в клетках одного цвета? (Ладья бьёт фигуру, если находится с ней на общей вертикале или горизонтали).

6. В турнире по настольному теннису без ничьих участвуют мальчики и девочки, причем мальчиков втрое больше. Известно, что число побед, одержанных девочками равно числу побед, одержанных мальчиками. Докажите, что в турнире победила Таня.
7. На плоскости задано  $n$  точек внутри некоторого круга ( $n > 2$ ).
  - а) Покажите, что среди данных точек, найдутся три различные точки  $a, b, c$  и три различные точки окружности  $A, B, C$ , что точка  $a$  строго ближе к точке  $A$ , чем остальные точки заданного множества. (Строго ближе означает, что расстояние между точками  $a$  и  $A$  строго меньше, чем расстояние между точкой  $A$  и любой другой точкой заданного множества, отличной от  $a$ ) Точка  $b$  строго ближе к точке  $B$  и точка  $c$  строго ближе к точке  $C$ , чем остальные точки данного множества.
  - б) Пусть  $n = 2007$ , найдутся ли четыре пары различных точек, удовлетворяющих условию, сформулированному в пункте а)?
8. Назовём упорядоченную тройку положительных целых чисел  $(a, b, c)$   $n$ -мощной, если  $a$  не больше чем  $b$  и  $b$  не больше чем  $c$ ,  $\text{НОД}(a, b, c) = 1$  и  $a^n + b^n + c^n$  делится на  $a + b + c$ .
  - а) Определите всевозможные упорядоченные тройки, которые  $n$ -мощны для любого натурального  $n$ .
  - б) Определите всевозможные упорядоченные тройки, которые 2004-мощны и 2005-мощны, но не являются 2007-мощными.

Бой завершился победой **Лицея №2 г. Рыбинска** со счетом **57–39**.

**1/8 финала. Гимназия №3 — Ярославский район.  
23 марта 2007 г.**

1. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого больше 1500.
2. Точки  $E$  и  $F$  лежат соответственно на сторонах  $AB$  и  $BC$  ромба  $ABCD$ , причём  $AE = 5BE, BF = 5CF$ . Известно, что треугольник  $DEF$  — равносторонний. Найдите величину угла  $BAC$ .
3. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг в друга снежками не кидали.

4. Квадратная комната разгорожена перегородками на несколько меньших квадратных комнат. Длина стороны каждой комнаты — целое число. Докажите, что сумма длин всех перегородок делится на 4.
5. Найдите все пары целых чисел  $(x, y)$ , для которых  $2x^2 + y^2 = 2xy + 3y$ .
6. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?
7. Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , в котором  $AB = CD$ , пересекаются в точке  $O$ . Серединные перпендикуляры к диагоналям  $AC$  и  $BD$  и биссектриса угла  $AOD$  проходят через одну точку. Докажите, что стороны  $AD$  и  $BC$  параллельны.
8. Найдите все такие многочлены  $P(x)$  с коэффициентом 1 при старшем члене, что  $(x - 8)P(2x) = 8(x - 1)P(x)$ .

Бой завершился победой **Гимназии №3** со счетом 57–24.

**1/8 финала. Лицей №1 г. Тутаева — Школа №58(1).  
6 апреля 2007 г.**

1. Игорь написал четырехзначное число, а Костя подписал под ним в столбик все числа, получающиеся из данного всевозможным стиранием цифр (числа могли получиться равными). Сумма всех 15 чисел оказалась равна 2007. Какое могло быть первоначальное число?
2. Выбежав после уроков на двор, каждый школьник кинул снежком ровно в одного другого школьника. Докажите, что всех учащихся можно разбить на три команды так, что члены одной команды друг друга снежками не кидали.
3. Найдите все натуральные числа, представимые в виде  $[a\sqrt{2} + b\sqrt{3}]$  с натуральными  $a$  и  $b$ .
4. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектриса  $BL$  и медианы  $AM$  и  $CK$ . Оказалось, что треугольник  $MKL$  — равносторонний. Докажите, что и треугольник  $ABC$  — равносторонний.
5. Действительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Докажите неравенство:
 
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq 3 + \frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}.$$
6. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

7. Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$ , в котором  $AB = CD$ , пересекаются в точке  $O$ . Серединные перпендикуляры к диагоналям  $AC$  и  $BD$  и биссектриса угла  $AOD$  проходят через одну точку. Докажите, что стороны  $AD$  и  $BC$  параллельны.
8. Найдите все такие многочлены  $P(x)$  с коэффициентом 1 при старшем члене, что  $(x - 8)P(2x) = 8(x - 1)P(x)$ .

Бой завершился победой **Школы №58(1)** со счетом 4–71.

#### 1/4 финала. Гимназия №2 — Школа №33(2). 11 апреля 2007 г.

1. Дан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . На прямой  $AF$  отмечена точка  $X$  таким образом, что  $\angle DCX = 45^\circ$ . Найдите угол  $FXE$ .
2. Докажите неравенство:  $[x^8] + [x^2] \geq 2[x^5]$ .
3. Джей написал четырехзначное число, а Молчаливый Боб подписал под ним (молча) в столбик все числа, получающиеся из данного всевозможным стиранием цифр (числа могли получиться равными). Сумма всех 15 чисел оказалась равна 2007. Какое могло быть первоначальное число?
4. Про натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  известно, что  $\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{2b+4c} = \frac{1}{2c}$ . Докажите, что число  $ab + ac + bc + 1$  не делится на 3.
5. Двадцать теннисистов играют по следующей схеме: сначала играют теннисисты  $T_1$  и  $T_2$ , а теннисисты  $T_3, T_4, \dots, T_{20}$  стоят в очереди (в указанном порядке). После каждой игры победитель получает 1 очко, проигравший встает в конец очереди, а его место занимает первый на очереди теннисист. Турнир заканчивается, когда один из теннисистов наберет 8 очков. После окончания оказалось, что в сумме все теннисисты набрали 136 очков. Кто из них стал победителем?
6. Найдите все функции  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , удовлетворяющие условию  $f(m + f(n)) = f(m + n) + 2n + 1$  при всех целых  $m$  и  $n$ .
7. В остроугольный треугольник  $ABC$  вписана окружность  $\omega$ , касающаяся стороны  $BC$  в точке  $K$ . На прямых  $AB$  и  $AC$  выбраны соответственно точки  $P$  и  $Q$  такие, что  $PK \perp AC$  и  $QK \perp AB$ . Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения  $KP$  и  $KQ$  с окружностью  $\omega$ . Докажите, что если  $MN \parallel PQ$ , то треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

8. На планете Киборгов 200 пещер, некоторые из них соединены тоннелями. Начиная с 11 апреля 2007 года, киборги ежедневно засыпают старые тоннели и выкапывают новые между каждой парой пещер, из которых в предыдущий день выходило одинаковое количество тоннелей. В каких-то  $N$  пещерах живут Суперкиборги. При каком наименьшем  $N$  какие-то два из них гарантированно встретятся?

Бой завершился победой **Гимназии №2** со счетом 47–37.

**1/4 финала. Гимназия №3 — Костромская область.  
15 апреля 2007 г.**

1. Биссектрисы углов вписанного четырехугольника пересекаются в точках  $H$ ,  $A$ ,  $T$  и  $E$ . Докажите, что диагонали четырехугольника  $HATE$  перпендикулярны.
2. Докажите неравенство

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}}$$

3. В банде 50 бандитов. Все вместе они ни в одной разборке ни разу не участвовали, а каждые двое встречались на разборках ровно по разу. Докажите, что один из бандитов был не менее, чем на 8 разборках.
4. При каком значении  $k$  величина  $a_k = \frac{2008^k + 2007^k + 2006^k}{k!}$  максимальна?
5. Решите уравнение  $\operatorname{tg}(\cos(\sin(\pi x))) = \operatorname{ctg}(\pi/2 - 1)$ .
6. Найдите все функции  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ , удовлетворяющие условию  $f(m + f(n)) = f(m + n) + 2n + 1$  при всех целых  $m$  и  $n$ .
7. Решите уравнение в натуральных числах:  $2^n = a! + b! + c!$ .
8. Пусть  $\omega$  – окружность, а  $P$  – некоторая точка плоскости. Каждая прямая, проходящая через  $P$  и пересекающая  $\omega$ , определяет хорду. Докажите, что середины всех таких хорд лежат на одной окружности.

Бой завершился победой **Костромской области** со счетом 24–61.

**1/4 финала. Школа №58(1) — Школа №33(1). 11 мая 2007 г.**

1. Внутри параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $K$  таким образом, что середина отрезка  $AD$  равноудалена от точек  $K$  и  $C$ , а середина отрезка  $CD$  равноудалена от точек  $K$  и  $A$ . Точка  $N$  — середина отрезка  $BK$ . Докажите, что углы  $NAK$  и  $NSK$  равны.
2. Числа от 1 до 999999 разбиты на 2 группы: в первую отнесено каждое число, для которого ближайшим к нему квадратом является квадрат нечетного числа, во вторую — числа, для которых ближайшими являются квадраты четных чисел. В какой из групп сумма чисел больше?
3. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке  $N$ . Касательная к внутренней окружности, проведенная в точке  $K$ , пересекает внешнюю окружность в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $M$  — середина дуги  $AB$ , не содержащей точку  $N$ . Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника  $BMK$ , не зависит от выбора точки  $K$  на внутренней окружности.
4. В компании из  $2n + 1$  человек для любых  $n$  человек найдется отличный от них человек, знакомый с каждым из них. Докажите, что в этой компании есть человек, знающий всех.
5. Докажите, что если  $0 < a, b, c, d \leq 2$ , то

$$\frac{a}{b+cd} + \frac{b}{c+da} + \frac{c}{d+ab} + \frac{d}{a+bc} \geq \frac{4}{3}.$$

6. Джей может съесть палку докторской колбасы за 5 минут, палку любительской колбасы — за 4 минуты, а Молчаливый Боб может съесть палку докторской колбасы за 2 минуты, а палку любительской — за 3 минуты. Палку колбасы разрешается в том числе есть с двух сторон одновременно. За какое наименьшее время они могут съесть две палки колбасы, одна из которых докторская, а другая — любительская?
7. Найдите все натуральные  $n$  такие, что  $3^n + 5^n$  делится на  $3^{n-1} + 5^{n-1}$ .
8. Функция  $f$  непрерывна на всей действительной оси. Известно, что уравнение  $f(x + f(x + \dots f(x) \dots)) = 2007x$  (где функция  $f$  применена 2007 раз) имеет решение. Докажите, что уравнение  $f(x) = x$  также имеет решение.

Бой завершился победой **Школы №33(1)** со счетом 0–70.

**Полуфиналы. 13 мая 2007 г.**  
**Школа 33(1) — Гимназия №2.**  
**Лицей №2 г. Рыбинска — Костромская область.**

1.  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ ,  $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ ,  $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$  — правильные семиугольники с площадями  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  соответственно. Известно, что  $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$ . Докажите неравенство:  
$$\frac{1}{2} < \frac{S_B + S_C}{S_A} < 2 - \sqrt{2}.$$
2. Для  $n \geq 2$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из отрезка  $[0; 1]$  докажите неравенство:  
$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \dots - x_{n-1}x_n - x_nx_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$
3. Докажите, что для каждого натурального  $n$  верно, что  $3^n + n^3$  делится на 7 тогда и только тогда, когда  $3^n n^3 + 1$  делится на 7.
4. Точка  $D$  лежит внутри остроугольного треугольника  $ABC$ . Около треугольников  $ABC$ ,  $ADB$ ,  $ADC$ ,  $BDC$  описаны окружности. Радиусы трех из них одинаковы. Докажите, что и у четвертой окружности радиус тот же.
5. Попарно различные действительные числа образуют арифметическую прогрессию, а некоторая их перестановка образует геометрическую прогрессию. Чему могут равняться данные числа, если их не меньше трех, а наибольшее среди них равно 1000?
6. Преобразование плоскости сохраняет единичные расстояния. Докажите, что оно сохраняет все расстояния.
7. На плоскости расположено несколько точек ( $n$ ), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Джей и Молчаливый Боб играют в игру, совершая ходы по очереди (Джей ходит первым). За ход разрешается соединить отрезком две точки, между которыми пока нет отрезка. Выигрывает тот, после хода которого каждая точка является концом хотя бы одного отрезка. При каких значениях  $n$  победу в игре одержит Джей?
8. Найдите все пары натуральных чисел  $n$  и  $k$ , при которых для всех действительных значений  $x$  выполняется равенство:  
$$\sin^n(x) + \cos^k(x) = \sin^k(x) + \cos^n(x).$$

Бой Школа 33(1) — Гимназия №2 завершился победой **Школы №33(1)** со счетом 75–5.

Бой Лицей №2 г. Рыбинска — Костромская область завершился победой **Лицея №2 г. Рыбинска** со счетом 64–16.

**Финал. Школа №33(1) — Лицей №2 г. Рыбинска. 20 мая 2007 г.**

1. Пустыня разбита на единичные квадратики (клетки), в одном из которых находится лев. За ход разрешается установить решетку, разделяющую какие-либо две клетки, а лев после установки каждой решетки перебегают на соседнюю по стороне клетку. Чтобы поймать льва, нужно огородить клетку, где он находится, решетками. Всегда ли можно это сделать за 100 ходов?
2. Существует ли такое натуральное число  $n$ , для которого  $\frac{S(n^3)}{S(n^2)} \geq 2007^{2007}$ ? ( $S(x)$  — сумма цифр  $x$ .)
3. Касательная, проведенная к описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $A$  пересекает прямую  $BC$  в точке  $D$ . Перпендикуляр, восстановленный к  $BC$  в точке  $B$  пересекает серединный перпендикуляр к  $AB$  в точке  $E$ , а перпендикуляр, восстановленный к  $BC$  в точке  $C$  пересекает серединный перпендикуляр к  $AC$  в точке  $F$ . Докажите, что точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  лежат на одной прямой.
4. Найдите все натуральные  $a$ ,  $m$ ,  $n$ , для которых  $(a + 1)^n$  делится на  $a^m + 1$ .
5. Действительные числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  не превосходят 1. Известно, что  $n \geq 3$  и  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n - 2$ . Докажите, что  $x_1^5 + x_2^5 + \dots + x_n^5 \geq \frac{(n-2)^5}{n^4}$ .
6. В зале находятся 2007 человек. Каждый знает не более 5 языков. Для любых трех человек найдутся двое, которые знают какой-либо общий язык. Докажите, что есть язык, который знают не менее 200 находящихся в зале.
7. На плоскости дано множество  $S$  из 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Пусть  $M(S)$  — площадь наибольшего из треугольников с вершинами в точках множества  $S$ ,  $m(S)$  — площадь наименьшего такого треугольника. Найдите наименьшее значение отношения  $\frac{M(S)}{m(S)}$ .
8. Найдите все функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для произвольных  $x$  и  $y$  удовлетворяющие равенству:  $f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$ .
9.  $ABC$  — остроугольный треугольник, не являющийся равносторонним.  $M$  — середина  $BC$ ,  $X$  — произвольная точка на отрезке  $AM$ ,  $Y$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $X$  на  $BC$ ,  $Z$  — произвольная точка на отрезке  $XY$ ,  $U$  и  $V$  — основания перпендикуляров,



опущенных из  $Z$  на  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что биссектрисы углов  $UZV$  и  $UXV$  параллельны.

10. Найдите наименьшее значение  $n > 4$ , при котором существует граф на  $n$  вершинах, не содержащий треугольников и в котором для любых двух несмежных вершин  $A$  и  $B$  найдутся ровно две вершины, соединенные и с  $A$ , и с  $B$ .

Бой завершился победой **Школы №33(1)** со счетом 46–38.